Pathwise Projective Invariance of Brownaian Motion & Unitary Representations of SL(2,R)

AUTHOR(S):

竹中, 茂夫

CITATION:

竹中, 茂夫. Pathwise Projective Invariance of Brownaian Motion & Unitary Representations of SL(2,R). 数理解析研究所講究録 1988, 642: 198-212

ISSUE DATE:

1988-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/100208

数理解析研究所講究録
642巻 1988年 198-212

Pathwise Projective Invariance of Brownaian Motion & Unitary Representations of SL(2,R)

竹中　茂夫（名古屋大学理学部数学教室）
Shigeo TAKENAKA　(Nagoya Univ.)

無限次元の連続群及びそのユニタリー表現を考えていくうえでの、一つの手がかりとして飛田・野本・久保・吉沢によって次に示す群が提案された：

$$O^{\infty}(\mathcal{D}_0)\equiv\{T\in\mathcal{U}(L^2(R,dx));T\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}_0,T\text{ cont. on }\mathcal{D}_0\},$$

$$\mathcal{D}_0\equiv\{f\in C^{\infty}(R);f(\tfrac{1}{t})\in C^{\infty}(R)\}$$

さて、$\mathcal{D}_0$ の上に定義された正定値関数 $C(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2}$、$\|\cdot\|$ は $L^2(R)$のノルム、に対応して双対空間 $\mathcal{D}_0'$ 上には確率測度 μ が定義されるが、上記の群の各元はこの μ を不変にしていることは明らかであろう。 $O^{\infty}(\mathcal{D}_0)$の元は有限次元的なもの、例えば有限次元の回転、と真に無限次元的なものがある。（このへんの議論はこの報告集にある尾畑氏の論文を参照下さい。） 真に無限次元的なものとして飛田etc は確率論的観点から次の１－パラメーター部分群に着目した、

1）シフト　　　：ブラウン運動の流れ。

$$S_h:f(t)\longrightarrow f(t+h).$$

2）スケール変換：オルンスタイン・ウーレンベック過程の流れ。

$$D_u:f(t)\longrightarrow e^{u/2}f(e^u t).$$

さらに、1），2）とtransversal に交わり、あわせて３次元のLie 群を作るような変換として

3）special conformal transform

$$K_k:f(t)\longrightarrow\frac{1}{|kt+1|}f\left(\frac{t}{kt+1}\right).$$

が導入された。　この３次元のLie 群はＳＬ（２，Ｒ）のユニタリー表現を構成している。　すなわち、ブラウン運動がある意味での射影不変性を持つことを示している。飛田etc は、この不変性の一つの現れとしてP.Lévyの射影不変性（後で詳しく述べる）が説明出来ることを、示唆している。

この小文の目的は、Lévyの射影不変性をより直接的にBrown 運動の道の性質から導くところにあるが、結果的にはLévyの示した確率法則の不変性よりさらに強く、道毎の性質としての射影不変性が成立することが示される。 表現論的なかかわりとしては、飛田の

扱った表現と、我われの得た不変性から来る表現は、異なるクラスに属する表現である事が示される。 実際、前者は、パラメータがゼロの主系列（又は補系列の極限）であり、後者はパラメータ２の離散系列となる。 最後に（§４）研究集会では触れなかった高次元のユークリッド空間をパラメータにするブラウン運動について、得られている結果を書いておく。 この場合、厳密な意味での不変性は持たないが、関係する群が射影群 SL(n+1,R) ではなく、ｎ次元のメビウス群Mö(n) であり、共形幾何学と関連している。

§０．確率論の記号。 確率論で使う用語と記号をざっと説明する。

まず基礎になる確率空間は $(\Omega,\mathcal{B},P)$ また Ω の元は ω と書く事が多く、またこの確率を表現するパラメータ ω は（本来確率論では一番重要なもののはずであるが）時には省略される場合がある。 $(\Omega,\mathcal{B})$ から他の可測空間Ｍ（例えば $(\mathbb{R}^1,dx)$）への可測な関数を特に（確率パラメータを意識して）確率変数（random variable ）と呼ぶ。 また Ω 以外にパラメータを持つ確率変数を（そのパラメータを暗に時間と見なして）確率過程と呼ぶ。 確率 $\mathbb{P}$ にたいする積分を $\mathbb{E}$ で表し、確率変数 X が誘導するＭ上の確率測度を確率法則といい、同じ法則を誘導する確率変数（もちろん確率過程でも）は法則の意味で等しいといわれる。

ブラウン運動で、説明すれば確率過程 $\{B(t;\omega);t\in\mathbb{R}\}$ がブラウン運動であるとは

−１）$\{B(t);t\in\mathbb{R}\}$ がガウス型の確率変数系であること。 乃ち任意の $t_1,\cdots,t_n$ $\in\mathbb{R}$ 及び $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ について一次結合 $\sum^n a_iB(t_i;\omega)$ がガウス型の確率法則にしたがう、つまり平均 m と分散 σ^2 が存在して

$$P(\sum a_iB(t_i)\leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-m)^2}{\sigma^2})dx .$$

０）$B(0)\equiv 0$.

１）差 $B(t)-B(s)$ が平均 0 分散 $|t-s|$ のガウス分布 $N(0,|t-s|)$ に従う。

２）連続な道を持つ。 乃ちブラウン運動によって誘導された $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ の上の確率測度が、連続関数のクラス $C(\mathbb{R})$ に集中している。

時には−１）から１）だけを充すものをブラウン運動と呼ぶこともある。 例えば、−１）から２）を充すブラウン運動 $B(t)$ を持ってきて、各時点 t ごとに確率０の Ω の部分集合 N_t に属する ω にたいして $\tilde{B}(t)=0$ 、それ以外の ω に対して $\tilde{B}(t)=B(t)$ とおけば、もし Ω $=\cup N_t$ であれば（実際このような N_t は構成できる）−１）から１）までを充たし２）は確率１で充たさない確率過程を容易に作ることが出来

る。 この２つの確率過程は　　、互いに相手のversion になっている。　　たとえば、－１）から１）を充す確率過程を考えておいて、連続な道を持つversion をとりなおすという言いかたをする。 いつそんな都合のよいversion がとれるかといったくわしい議論は確率論の教科書を参照のこと。

さて、ガウス型確率変数系 $\{X(t);t\in\mathbb{R}\}$ はその共分散 $\sigma(t,s)\equiv E[(X(t)-EX(t))\cdot(X(s)-EX(s))]$ と平均 $E[X(t)]$ で決定されてしまうが（ブラウン運動の定義からも推察されよう）とくに、ブラウン運動は平均がゼロであるからブラウン運動の線型結合 $\varphi=\sum a_i B(t_i)$ と $\psi=\sum b_i B(t_i)$ にたいして、内積を $(\varphi,\psi)\equiv\sum a_i b_j\,\sigma(t_i,t_j)$ と定義すると、線型結合の全体 $\mathcal{H}$ は実ヒルベルト空間を作る。 都合のよい事に、ガウス型確率変数系に関しては、内積の意味での直交性と独立性が一致している。 $\mathcal{H}$ の元 φ の部分空間 $\mathcal{K}$ への直交射影を（少しょう紛らわしいが） $E[\varphi\,|\,\mathcal{K}]$ と書き条件付き期待値と呼ぶ。 勿論、ガウス系でない一般のときも、Radon-Nykodym 微分として、　条件付き期待値は定義出来るので、いつも条件付き期待値＝射影と短絡しては困るがこの小文の範囲、乃ちガウス型確率変数系の一次結合の範囲ではこれでＯＫである。

§１。 ブラウン運動の道空間の射影不変性。

ガウス型確率変数系 $\{B(t);t\in\mathbb{R}^1\}$ がブラウン運動であるということを§０より強く　０） $B(0)\equiv 0$　，　１） $B(t)-B(s)=N(0,|t-s|)$，

２）無限遠もこめて、任意の　　について時間パラメータ　について連続。 乃ち

$$B(t+h)\xrightarrow[h\to 0]{}B(t)\ ,\quad \frac{1}{t}B(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0\ .$$

このとき確率空間として０）２）を充す関数の作る空間自体を考えておくのが便利である

$$\Omega=\mathcal{W}\equiv\{\ f\in C(\mathbb{R});\ f(0)=0,\ t\cdot f(1/t)\to 0\ \text{if}\ t\to\infty\}.$$

さてこのブラウン運動の道の作る空間 $\mathcal{W}$ には次のようなブラウン運動が定義する確率 μ を不変にする変換がある：

Ｔ１）　$X_1(t)\equiv B(t+h)-B(h)$,

Ｔ２）　$X_2(t)\equiv e^{-u/2}B(e^u t)$.

上で定義された確率過程 X_1, X_2 はどちらもこの§の意味でのブラウン運動である。 この意味でＴ１），Ｔ２）は確率空間 $\mathcal{W}$ 上に、保測変換の１－パラメータ部分群を定義する。

また明らかに　Ｔ１）とＴ２）は行列群 $\left\{\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}e^{u/2} & 0\\ 0 & e^{-u/2}\end{pmatrix}\right\}$ と同型な群を生成している。 もっと大きな群が作用していないかと考えるのは自然であろう。 飛田 etc はこの疑問に、ホワイトノイズの理論を使って答えた（［2］）。 しかしここでは、もっと直接的な方法をとる。

Ｔ１）、Ｔ２）からは、一次分数変換が強く示唆されるのでSL(2,R) のinvolution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対応するブラウン運動の変換から考えよう。　時間パラメータの変換と全体の符号に対応して次の４っつの可能性がある。

Ｔ３ａ）　$tB(-\frac{1}{t})$，　　　　　Ｔ３ｂ）　$|t|B(-\frac{1}{t})$，

Ｔ３ｃ）　$|t|B(\frac{1}{t})$，　　　　　Ｔ３ｄ）　$tB(\frac{1}{t})$．

上で定義された４っつの確率過程はいずれも（無限遠での連続性が効いてきて）ブラウン運動となる。　　さて、Ｔ１）、Ｔ２）及びＴ３）のどれかを組あわせてPGL(2,R)と同型な群が生成出来るであろうか。　この答は（当然？それとも意外にも？）Ｎｏである。後で例示するように、Ｔ３ａ）を除いて有限次元Lie 群の範囲にはおさまっていない。Ｔ３ａ）については、次の定理が示す様にPGL(2,R)の二回covering　SL(2,R)（単連結であるから勿論普遍被覆であるが）があらわれてくる。　　Ｔ３）も確率空間 $\mathcal{W}$ に直接作用しているから、下の定理はブラウン運動の道の空間が何らかの意味での射影不変性を内包していることを示す。　実際§２で見る様に、これはLévyの射影不変性となって現れている。

この性質を飛田達に従って"Pathwise Projective Invariace" と呼ぼう。

定理１。

任意の $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$ に対して

ａ）$B^g(t;\omega) = (ct+d)B(\frac{at+b}{ct+d};\omega) - ctB(\frac{a}{c};\omega) - dB(\frac{b}{d};\omega)$　　は上記の意味でブラウン運動である。

ｂ）　任意の $g,h\in SL(2,\mathbb{R})$ に対して群演算の結合則 $(B^g)^h(t) = B^{gh}(t)$ が成立する。

註。　ａ）の式中例えば $ct+d=0$ となるとき、　定義が不定になるようにみえるが、ブラウン運動の性質として無限遠での連続性２）を仮定してあるので係数と併せればその項は消えてしまう。　さらにａ）は単に３つのパラメータを持つ変換がブラウン運動の道の空間に作用していることのみをしめし、けっして行列群が群として作用している事は主張していないし、この形から群として作用する事は自明ではない。　実際、この意味では自然に作用するべき群は時間パラメータを見ればわかるようにPGL(2,R)である。しかし余分な係数および補正項がついているのでPGL(2,R)自体は作用していない。　ｂ）が、PGL(2,R)の被覆群SL(2,R) が群として作用している事を積極的に述べている。

証明。　もし $B^g(t)$ がブラウン運動ならば、それにＴ１），Ｔ２），Ｔ３ａ）の変換をおこなっても、その結果は又ブラウン運動となるから、実質的にはｂ）をこの各の場合

に確かめれば充分である。

$$\text{T1)}\quad (B^g)^{\begin{pmatrix}1,h\\0,1\end{pmatrix}}(t) = B^g(t+h)-B^g(t) = (ct+(ch+d))B\left(\frac{at+(ah+b)}{ct+(ch+d)}\right)$$

$$-(ct+ch)B\left(\frac{a}{c}\right) - dB\left(\frac{d}{b}\right) -(ch+d)B\left(\frac{ah+b}{ch+d}\right) + chB\left(\frac{a}{c}\right) + dB\left(\frac{b}{d}\right).$$

$$=(ct+(ch+d))B\left(\frac{at+(ah+b)}{ct+(ch+d)}\right) - ctB\left(\frac{a}{c}\right) - (ch+d)B\left(\frac{ah+b}{ch+d}\right)$$

$$=B^{\begin{pmatrix}a,ah+b\\c,ch+d\end{pmatrix}}(t) = B^{\begin{pmatrix}a,b\\c,d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1,h\\0,1\end{pmatrix}}.$$

$$\text{T2)}\quad (B^g)^{\begin{pmatrix}\exp(u/2), & 0\\ 0 & ,\exp(-u/2)\end{pmatrix}}(t) = e^{-u/2}\left\{(ce^u t+d)B\left(\frac{ae^u t+b}{ce^u t+d}\right)\right.$$

$$\left.-ce^u tB\left(\frac{a}{c}\right) - dB\left(\frac{b}{d}\right)\right\} = (ce^{u/2}t+de^{-u/2})B\left(\frac{ae^{u/2}t+be^{-u/2}}{ce^{u/2}t+de^{-u/2}}\right)$$

$$-ce^{u/2}tB\left(\frac{ae^{u/2}}{ce^{u/2}}\right) -de^{-u/2}B\left(\frac{be^{-u/2}}{de^{-u/2}}\right)=B^{\begin{pmatrix}a,b\\c,d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\exp(u/2), & 0\\ 0 & ,\exp(-u/2)\end{pmatrix}}.$$

$$\text{T3)}\quad (B^g)^{\begin{pmatrix}0,-1\\1,0\end{pmatrix}}(t) = t\left\{\left(-\frac{c}{t}+d\right)B\left(\frac{-a/t+b}{-c/t+d}\right) + \frac{c}{t}B\left(\frac{a}{c}\right) -dB\left(\frac{b}{d}\right)\right\}$$

$$= (dt-c)B\left(\frac{bt-c}{dt-c}\right) -dtB\left(\frac{b}{d}\right) -(-c)B\left(\frac{-a}{-c}\right) = B^{\begin{pmatrix}a,b\\c,d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,-1\\1,0\end{pmatrix}}(t).$$

さて、T３b），T３c），T４d）を考えると、どうなるかという事だが、ブラウン運動を含むより広いクラスの確率過程であるガウス型自己相似過程を考えてみよう。この場合T３b）とT３c）しか意味を持たないが、この時、T１）からT３）では、b）が成立しない事がわかる。　すなわち、ブラウン運動は自己相似過程（Gaussian self-similar process またはfractional Brownian motionとも呼ばれる）のなかでSL(2,R) の作用を許すという特徴を持つ。

ガウス型確率変数系 $\{X^\alpha(t)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ が自己相似であるとは、

０） $X^\alpha(0)\equiv 0$,

１） $X^\alpha(t)-X^\alpha(s) = N(0, |t-s|^\alpha)$,

２） t について無限遠もこめて連続な道を持つ。

と定義しよう。　このような確率過程は指数が $0<\alpha<2$ の時にのみ存在する。ブラウン運動と同じように次の様な変換がその道の空間に定義される。

T１’）$X^{\alpha}(t+h)-X^{\alpha}(h)$

T２’）$e^{-\alpha u/2}X(e^{u}t)$

T３’ｂ）$|t|^{\alpha}B(-\frac{1}{t})$　　　　T３’ｃ）$|t|^{\alpha}B(\frac{1}{t})$

勿論、変形された確率過程は各もとと同じ指数の自己相似過程となる。　定理１　と同様に、群を生成しようと思っても次のように失敗する。　ここではＴ３’ｂ）について述べておくが、Ｔ３’ｃ）についても同様である。

定理２．Ｉ）$G_u=\left\{\begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & 1/a \end{pmatrix}; a>0,\ b\in\mathbb{R}\right\}$ とすると

ａ）　$X^{\alpha,g}(t)\equiv|a|^{-\alpha}X^{\alpha}(a^2t+ab)-|a|^{-\alpha}X^{\alpha}(ab)$　　は任意の $g\in G_u$ にたいして指数　の自己相似過程である。

ｂ）任意の　$g, h\in G_u$　に対して $(X^{\alpha,g})^{h}(t)=X^{\alpha,gh}(t)$ 。

ＩＩ）　$G_l=\left\{\begin{pmatrix} c, & 0 \\ d, & 1/c \end{pmatrix}; c>0, d\in\mathbb{R}\right\}$とすると

ａ）　$X^{\alpha,g}(t)\equiv|dt+\frac{1}{c}|^{\alpha}X^{\alpha}(\frac{ct}{dt+1/c})-|ct|^{-\alpha}X^{\alpha}(c)$　　は任意の $g\in G_l$ にたいして指数　の自己相似過程である。

ｂ）任意の　$g, h\in G_l$　に対して $(X^{\alpha,g})^{h}(t)=X^{\alpha,gh}(t)$ 。

ＩＩＩ）　上の群の作用はSL(2,R) の部分群としては、整合性がない。　乃ち $g, g'\in G_u$, $h, h'\in G_l$ でSL(2,R) の元として $gh=h'g'$　なるものが存在して。

$$(X^{\alpha,g})^{h}\neq(X^{\alpha,h'})^{g'}$$

Ｉ），ＩＩ）の証明は、定理１のそれの繰りかえしであるからさける。　ＩＩＩ）については(反)例を挙げておけば充分であろう。、

$$\begin{pmatrix} 1/2, & -\sqrt{3}/3 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \sqrt{3}/6, & 1 \end{pmatrix}\equiv g\cdot h=\begin{pmatrix} 1/3, & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3, & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3, & 0 \\ \sqrt{3}/3, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -\sqrt{3} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\equiv h'\cdot g'$$ とすると

$$(X^{\alpha,g})^{h}(t)=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}t+2\right|^{\alpha}X^{\alpha}\left(\frac{t/3-\sqrt{3}/3}{\sqrt{3}t/3+2}\right)-\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^{\alpha}X^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{3}t+2\right|^{\alpha}-\left|\frac{\sqrt{3}}{3}t\right|^{\alpha}\right)X^{\alpha}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right),$$

$$(X^{\alpha,g'})^{h'}(t)=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}t+2\right|^{\alpha}X^{\alpha}\left(\frac{t/3-\sqrt{3}/3}{\sqrt{3}t/3+2}\right)-\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{3}t-1\right|^{\alpha}+1\right)X^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-2^{\alpha}X^{\alpha}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

この反例でも分かるように、Ｔ１）－Ｔ３）で生成される群は、G_uとG_lの作用から生成した謂ば野生の群であり、定理１のように、美しく作用しているものではない。

§ 2．Lévyの射影不変性。　P.Lévyは、ブラウン運動、詳しくはBrownian Bridge に対して次の様な射影不変性を見つけた［4］。 $[\alpha,\beta]$ を $\mathbb{R}$ の区間とする時、区間内の点 t での値 $B(t)$ の端点 α,β での値に対して直交する成分を取りだし正規化したものをとする。　すなわち、 $\xi^{[\alpha,\beta]}(t) \equiv N^{-1}\cdot\{B(t)-\mathbf{E}[B(t)|B(\beta),B(\alpha)]\}$,

ここに　$N^2=\mathbf{E}|\{$ 〃 $\}^2|$.

具体的には

$$\xi^{[\alpha,\beta]}(t)=\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{(t-\alpha)(\beta-t)}}B(t)-\sqrt{\frac{\beta-t}{(\beta-\alpha)(t-\alpha)}}B(\alpha)-\sqrt{\frac{t-\alpha}{(\beta-\alpha)(\beta-t)}}B(\beta).$$

P.Lévyはこの確率過程(normalized Brownian bridge)の共分散が $(\alpha,\beta;s,t)$ の非調和比 $(t-\alpha)(\beta-s)/(\beta-t)(s-\alpha)$ の平方根に等しい事を見いだした。　ブラウン運動は何等かの意味で射影不変性を持つと言うわけである。　我われは§1でブラウン運動の道の空間それ自体が射影不変性を持つことを見ている。　この2つの不変性の関係を見てみよう。

定理2。 $\xi^{g,[\alpha,\beta]}(t;\omega) = \varepsilon\cdot\xi^{[g\alpha,g\beta]}(g^{-1}t;\omega)$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}(-c\alpha+a)$

ここで $\xi^{g,[\alpha,\beta]}$ は、ブラウン運動 B^g から上のLévyの方法にしたがって得られたnormalized Brownian bridge。

単なる初等的な計算なので、証明は省くが定理の系として分散を具体的に計算すること無しにLévyの不変性が出てくる事に注目されたい。　Lévyの結果は、ブラウン運動の持つ強い（道の空間に働く）意味での射影不変性のnormalized Brownian bridgeへの反映と解釈出来る。

ブラウン運動の射影不変性が道毎であることを用いると、次のような興味深い結果がわかる。 $g=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ として、射影不変性を書くと、

$B^g(t) = \frac{1}{1-s}\{B(s)-sB(1)\}$　　ここで $s=\frac{t}{1+t}$ である。　このとき、tが0から無限大まで増大する時、sは0から1へ増大する。　左辺は勿論ブラウン運動であるし、右辺の括弧内は0及び1で値0を取るpined Brounian motion とかBrownian bridge と呼ばれる確率過程である。　従ってブラウン運動とBrownian bridgeとの間に道毎の関係があることがわかったのである［6］。　さらには零点又はhitting timeに関して次のような等式も成立する。

$$B^g(t) - kt^{1/2} = \frac{1}{1-s}\{B(s)-sB(1)-ks^{1/2}(1-s)^{1/2}\}$$

§3。表現論との関係。$\{X^\alpha(t)\}$を§2で定義されたself-similar processとする。

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$の元 φ の X^α に関するウィナー積分を $I(f:\omega) \equiv -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t)X^\alpha(t)dt$

と定義する。 もちろん、積分値は平均0のガウス分布に従う。 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に内積を
$(\phi,\psi)_\alpha \equiv \mathbf{E}[I(\phi;\omega)I(\psi;\omega)]$で入れる。 実際

$$(\phi,\psi)_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\iint \phi(t)\psi(s)|t-s|^{\alpha-2}dtds,\quad |t-s|^\alpha$$

はGelfandのpseudo function の意味とする。 この内積による位相で$\mathcal{S}$を完備化した空間を
$\mathcal{L}^\alpha$とすると、ウィナー積分 I は $\mathcal{L}^\alpha$ から$L^2(\Omega)$の中への等距離写像を与る。 この像空間を $\mathcal{H}$ と書いて確率過程$\{X^\alpha\}$の一次関数の空間と呼ぶ。

さて、 X^α をT1)－T2)で変換した確率過程 $X^{\alpha,g}$に対しても同様にウィナー積分 I^g が定義出来る事は言うまでもない。 乃ち、群 G_uの各元に対して積分が与えれらている。 $(T_g\varphi,\psi)_\alpha \equiv E[I^g(\varphi)I(\psi)]$ により $\mathcal{L}^\alpha$ 上の作用素を定義すると、定理2Ib)より群 G_uの空間 $\mathcal{L}^\alpha$ でのユニタリー表現が得られたことになる。

具体的には $g=\begin{pmatrix}a, & b\\ 0, & 1/a\end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{E}[I^g(\phi)I(\psi)]=$

$$= \mathbf{E}\Big[\int\phi'(t)\{|a|^{-\alpha}X^\alpha(a^2t+ab) - |a|^{-\alpha}X^\alpha(ab)\}dt\cdot\int\psi'(s)X^\alpha(s)ds\Big]$$

$$=\mathbf{E}\Big\{\int\phi'(t/a^2 - b/a)|a|^{-\alpha-2}X^\alpha(t)dt\int\psi'(s)X^\alpha(s)ds\Big\}-\int\phi'(t)\mathbf{E}[\cdots\cdot]$$

$$= \big(|a|^{-\alpha}\phi(t/a^2 - b/a),\psi(t)\big)_\alpha.$$

となる。

飛田etc に習って、T1)，T2)とあわせて、3次元のLie 群SL(2,R) を作るような、新しい作用を考えよう。 Lie 環で考えた方が簡単なのでT1)，T2)に対応する無限小作用素をもとめる。

T1) $N_+ = -\frac{d}{dt}$

T2) $H = -\frac{\alpha}{2} - t\frac{d}{dt}$

交換関係は、$[H,N_+] = N_+$ 、であるので、新しい作用素は 関係 $[H,N_-]=-N_-$、$[N_+,N_-]=2H$ を充たせばよい。 微分作用素 $\sum_{k\geq 0} c_k t^k + \sum_{\ell\geq 0} d_\ell t^\ell \frac{d}{dt}$
の範囲で求めると$\alpha t+t^2\frac{d}{dt}$ が唯一の解である。 これには、$\mathcal{L}^\alpha$ の作用素の1－パラメータ部分群 $K_k\varphi(t) = |-kt+1|^\alpha\varphi\left(\frac{t}{-kt+1}\right)$ が対応する。 すなわちT1)－T2)とあわせて、ヒルベルト空間 でのSL(2,R) のユニタリ表現

$$(T_g\phi)(t) = |ct+d|^{-\alpha}\phi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)$$

が出現した。

表現があれば次に問題になるのは、如何なる表現であるかということである。　このためには（もし既約であることが推察出来ていれば）Casimir 作用素を計算してみるのが手っとり早い。　平井・須藤のpreprintによれば、Casimir 作用素が定数倍の時、その表現のパラメータは $\sqrt{8\Delta_\alpha+1}$ で示される。　我われの場合は、予測されるように、

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{4}(N_+N_- + N_-N_+) = \frac{1}{2}\{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha t\frac{d}{dt} + t^2\frac{d^2}{dt^2} + t\frac{d}{dt} - \frac{1}{2}(\alpha t\frac{d}{dt} + \alpha$$
$$+ 2t\frac{d}{dt} + t^2\frac{d^2}{dt^2} + \alpha t\frac{d}{dt} + t^2\frac{d^2}{dt^2})\} = \frac{1}{8}(\alpha^2 - 2\alpha), \quad \sqrt{8\Delta_\alpha+1} = |\alpha-1| \; .$$

乃ち、自己相似過程と補系列の既約ユニタリ表現とが対応している事がわかる。$\alpha=1$ のときが、飛田etc で得られたものであるが、この意味で彼等の表現はパラメータ 0 の補系列の表現である。

さて、§1で得られた射影不変性に対応する表現は何であろうか。　部分群 G_u では上の表現と一致するが、SL(2,R) 全体ではそれに対応するユニタリ変換を書き下すのは少しょう難かしい。$\begin{pmatrix}1,0\\k,1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0,-1\\1,\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,-k\\0,\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,-1\\1,\ 0\end{pmatrix}$ なる関係を使って無限小作用素を求めよう。　まず射影反転 $\begin{pmatrix}0,-1\\1,\ 0\end{pmatrix}$ に対しては、　$J = T_{\begin{pmatrix}0,-1\\1,0\end{pmatrix}}$　と置くと

$$\mathbf{E}[\int\phi'(t)tX(-\frac{1}{t})dt\int\psi'(s)X(s)ds\;] = \mathbf{E}[-\int\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}X(t)dt\int\psi'(s)X(s)ds]$$
$$= -\int_0^\infty\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}\int_0^t s\psi'(s)dsdt - \int_0^\infty\phi'(-\frac{1}{t})t^{-2}\int_t^\infty\psi'(s)dsdt$$
$$+\int_{-\infty}^0\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}\int_t^0 s\psi'(s)dsdt + \int_{-\infty}^0\phi'(-\frac{1}{t})t^{-2}\int_{-\infty}^t\psi'(s)dsdt$$
$$= -\int_0^\infty\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}\int_0^t\psi(s)dsdt + \int_0^\infty\psi'(-\frac{1}{t})t^{-3}\int_t^0\psi(s)dsdt$$
$$= -\int_0^\infty\psi(s)\int_s^\infty\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}dtds + \int_{-\infty}^0\psi(s)\int_{-\infty}^s\phi'(-\frac{1}{t})t^{-3}dtds$$
$$= \int_{-\infty}^\infty\psi(s)\frac{1}{s}\phi(-\frac{1}{s})ds + \int_0^\infty\psi(s)\int_0^{1/s}\phi(t)dtds - \int_{-\infty}^0\psi(s)\int_0^{1/s}\phi(t)dtds$$

したがって、求める作用素は、　$(J\phi)(t) = \frac{1}{t}\phi(-\frac{1}{t}) - \int_{-1/t}^0\phi(s)ds.$

$\tilde{N}_- = -J(\frac{d}{dt})J.$　で $\tilde{N}_-$ を計算すると

$$-\tilde{N}_-\phi(t) = J\frac{d}{dt}J\phi(t) = J(t^{-3}\phi'(-\frac{1}{t})) = -(\frac{1}{t}t^{+3}\phi'(t)) - \int_{-1/t}^0 s^{-3}\phi'(-\frac{1}{s})ds$$
$$= -t^2\phi'(t) - \frac{1}{s}\phi(-\frac{1}{s})\Big|_{-1/t}^0 - \int_{-1/t}^0 s^{-2}\phi(-\frac{1}{s})dt = -t^2\phi'(t) - t\phi(t) + (\frac{d}{dt})^{-1}\phi(t).$$

ここに $\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\phi(t) = -\int_t^{\infty}\phi(s)ds$ if $t \geq 0$, $\int_{-\infty}^{t}\phi(s)ds$ if $t<0$. 。

結局 $\tilde{N}_- = t^2\frac{d}{dt} + t\cdot - \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}$ となり飛田etc と異なり擬微分作用素が出現した。

これが、sl(2,R) の生成作用素の一つに成ることを念のためチェックしておくと

$$[H,\tilde{N}_-]=[H,N_-]-[-\frac{1}{2}-t\frac{d}{dt},\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}]=-N_-+t\cdot-\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}t\frac{d}{dt}=-N_-+\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}=-\tilde{N}_- .$$

$$[N_+,\tilde{N}_-]=[N_+,N_-]-[-\frac{d}{dt},\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}]=2H.$$

Casimir 作用素は

$$\Delta=\Delta_1+\frac{1}{4}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}+\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\right\} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

となり。 $\sqrt{8\Delta+1}=2$ より我われの表現はパラメータ２の離散系列に属することがわかった。 これで射影不変性と表現の関係を調べるという当初の目的は、はたしたのであるが、求めた表現の既約性はまだ調べてはいない。 ２次元の非ユニタリーな表現の成分は、ブラウン運動の定義０）及び２）さらに内積の導入時に消えるはずであるが、ユニタリーな２つの成分については今の所不明である。 もし、可約であればその既約分解を確率論的に考察するのは、非常に興味深いと思われる。

[1] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E. ; Generalized Functions vol.1 Academic Press (1964) original Russian ed. Moscow (1958)

[2] Hida, T. ; Brownian Motion, (in Japanese), Iwanami (1975) English ed. Springer (1980)

[3] Hida, T. Kubo, I., Nomoto, H. and Yoshizawa, H.; On Projective Invariance of Brownian Motion, Publ. Res. inst. Math. Sci. 4 (1968), 595-609

[4] Lévy, P.; Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars (1965).

[5] Yoshizawa, H.; Rotation Group of hilbert Space and its Application to Brownian Motion, Proc. of the International Conference of Functional Analysis and Related Topics (1970), 414-425

[6] Pollard, D.; Convergence of stochastic processes. 1984 Springer

§4．多パラメータの場合。

4－0．　$\mathbb{R}^n$をパラメータとするガウス型確率変数系$\{B(x); x\in\mathbb{R}^n\}$が（P.Lévyの意味で）ブラウン運動であるとは、

0) $B(0)\equiv 0$,　1) $B(x)-B(y)\simeq N(0,|x-y|)$　3)　xについて連続。

ものような確率過程のそんざいについては［2］［3］を参照。　さて、多パラメータのブラウン運動について、§1で見たような、不変性を考えていくわけであるが、特に問題になるのは§1のT3）に対応する変換である。　簡単のために、2－パラメータの場合を考えてみる。

まず思いつくのは、$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{P}^2$の局所座標系と見て、他の座標系へ移る変換

$(x,y) \longrightarrow (\frac{1}{x},\frac{y}{x})$　であろう。　これは斉次座標で書くと、

$(x,y,1) \longrightarrow (1,\frac{y}{x},\frac{1}{x})$ に対応している。　すなわち、n=1 の時我われの考えてきたT3）と本質的に同じものである。

$B(x,y) \longrightarrow \tilde{B}(x,y)=\mathrm{const}\cdot B(\frac{1}{x},\frac{y}{x})$　が　$N(0,(x^2+y^2)^{1/2})$ となるように定数を定めると、$\mathrm{const}=\dfrac{|x|^{1/2}}{(1+y^2)^{1/4}}(x^2+y^2)^{1/4}$となる。　$y=0$ とすると、この定数は$|x|$となってT3）の型の変換が現れることに注意されたい。

さて、$\tilde{B}(x,y)$が上の意味での　ブラウン運動であるかというと、

$\tilde{B}(1,1)=B(1,1)$, $\tilde{B}(1/2,1)=\dfrac{5^{1/4}}{2^{5/4}}B(2,2)$に対して

$$E[\tilde{B}(1,1)-\tilde{B}(1/2,1)]^2=E[\frac{5^{1/4}}{2^{5/4}}(B(2,2)-B(1,1))+(\frac{5^{1/4}}{2^{5/4}}-1)B(1,1)]^2$$
$$=\frac{5^{1/2}}{2^2}+\frac{1}{2^2}(5^{1/2}+2^{5/2}-2^{9/4}5^{1/4}).$$

左辺＝0.5、右辺＝0.754...　。　すなわち、$\mathbb{R}^2$を $\mathbb{P}^2$の局所座標系と見る考えは巧くいかない。　n=1 の時、$\mathbb{R}^1$ を $\mathbb{P}^1$の局所座標系と見たのであるが、$n\geq 2$で他にもn=1 の場合の一般化になっている幾何学（射影幾何以外の）があるだろうか。　実は、それが存在して、共型幾何と呼ばれている。　共型幾何では $\mathbb{R}^n$を1点コンパクト化してS^nと同型ととらえる。　この時（付ける加えられた）無限遠点での局所座標系への変換は、　$x \longrightarrow \dfrac{x}{|x|^2}$　と表せる。　ブラウン運動では $\tilde{B}(x)=|x|B(\dfrac{x}{|x|^2})$　となる変換が対応している。　n=1 とすると、またT3）型の変換となっていることに注意。

事実。$\tilde{B}$　はブラウン運動である。　実際、$E[\tilde{B}(x)-\tilde{B}(y)]^2=$

$$=E[|x|B(\frac{|x|}{|x|^2})-|y|B(\frac{|y|}{|y|^2})]^2=|x|+|y|-2|x||y|E[B(\frac{|x|}{|x|^2})B(\frac{|y|}{|y|^2})]$$

$$=|x|+|y|+|x||y|\{\frac{x}{|x|^2}-\frac{y}{|y|^2}-\frac{|x|}{|x|^2}-\frac{|y|}{|y|^2}\}=\frac{1}{|x||y|}\{||x|^2y-|y|^2x|\}$$

$=|x|^{-1}|y|^{-1}\{\sum(|x|^2y_i-|y|^2x_i)^2\}^{1/2}=|x|^{-1}|y|^{-1}\{|x|^4|y|^2+|y|^4|x|^2$
$-2|x|^2|y|^2\sum x_iy_i\}^{1/2}=\{|x|^2+|y|^2-2\sum x_iy_i\}^{1/2}=|x-y|$ となって、確かめられた。

これを用いて多パラメータブラウン運動の不変性を議論出来るが、§1でも見たように群を導入することによって、結果の見とうしが良くなるので次に初等的な共型幾何学（conformal geometry又はMöbius geometry）の説明をしておく。

4－1.　Möbius球とその幾何学。

$P^{n+1}(R)\ni \underline{x}=\begin{pmatrix} y\\ x\\ z\end{pmatrix}$, $x\in R^n$, $y,z\in R$を斉次座標とする。 $\mathbb{P}^{n+1}$ にindefiniteな内積を $J=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & -1\\ \hline & I_n & \\ \hline -1 & & 0\end{array}\right)$ として $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle\equiv {}^t\underline{x}J\underline{y}$で入れておく。

注意。$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$, $\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$ と座標変換すると、 $\eta^2-\xi^2=-2yz$ となり上の内積は $I_{n+1,1}$ 型の内積となる。

$S^n\equiv\{\underline{x}\in P^{n+1}|\langle\underline{x},\underline{x}\rangle=0\}$ をMöbius球と呼び S^n を S^n へ移す $PGL(n+2,\mathbb{R})$の元の作る部分群をMöbius群Mö(n) という；

$$\text{Mö}(n)\equiv\{g\ GL(n+2,R);\ {}^tgJg=\alpha_gJ\}$$

また、Mö(n) の次元は、O(n+1,1)と比べて、α_g の自由度で＋1，射影性で－1、すなわち $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ である。

さて、$S^n\ni\underline{x}=\begin{pmatrix} y\\ x\\ z\end{pmatrix}$ は、$|x|^2-2yz=0$ を充たす $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$ の元であるが、ここで $z\neq 0$ なる局所座標系を取って、代表元として $z=1$ なるものを考えれば $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}|x|^2\\ x\\ 1\end{pmatrix};x\in\mathbb{R}^n\right\}$ であるから、この局所座標系は $\mathbb{R}^n$ と同型となる。　(勿論、$y\neq 0$ の局所座標系も同様に考えられるが、是は謂ば無限遠点の近くの局所座標である。)　この局所座標系についてMö(n) の作用を考えてみよう。

註。$\cos\theta=\frac{\langle\underline{x},\underline{y}\rangle}{|\underline{x}||\underline{y}|}$ で $\langle\underline{x},\underline{x}\rangle>0$の範囲での角度の定義とすると、Mö(n) がこの角度を不変にすることは明らかである。 この意味でMö(n) はconformal group と呼ばれることもある。 SL(2,R) が上半平面で解析的に作用するのはこの特別な場合である。

作用をいくつかに分類する。

I)　回転　$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & g & \\ \hline & & 1\end{array}\right)$; $g\in SO(n)$; $x\longrightarrow gx$; $\frac{1}{2}n(n+1)$次元

II) 平行移動

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & {}^tv & |v|^2/2\\ \hline 0 & I_n & v\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} y\\ x\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y+\langle v,x\rangle+|v|^2/2\\ x+v\\ 1\end{pmatrix}$$

念のためチェックしておくと、$\frac{1}{2}|x|+|v|^2=\frac{1}{2}|x|^2+\frac{1}{2}|v|^2+\langle x,v\rangle=y+\frac{|v|^2}{2}+\langle v,x\rangle$

III_a) Homogenious dilation a.

$$\begin{pmatrix} e^t & & \\ \hline & e^{t/2}I_n & \\ \hline & & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t y \\ e^{t/2}x \\ 1 \end{pmatrix}$$

III_b) Homogenious dilation b.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \hline & e^{-t/2}I_n & \\ \hline & & e^{-t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ e^{-t/2}x \\ e^{-t} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} e^t y \\ e^{t/2}x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

両者は同じ変換　$x \longrightarrow e^{t/2}x$　を引きおこす。　　　　次元＝1。

I）－III）までで生成されるMo(n) の部分群（ユークリッドの相似変換群）を G_0とする。　明らかに $\dim G_0=\frac{1}{2}n(n+1)+1$.

IV）無限遠での平行移動。

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \hline 2v & I_n & \\ \hline 2|v|^2 & 2\,{}^t v & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ x+2vy \\ 2|v|^2y+2\langle x,v\rangle+1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \dfrac{x+v|x|^2}{|v|^2|x|^2+2\langle x,v\rangle+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち、　$x \longrightarrow \dfrac{x+v|x|^2}{|v|^2|x|^2+2\langle x,v\rangle+1}$　　なる変換。　次元＝n　。

$$\frac{1}{2}|x+2vy|^2=\frac{1}{2}|x|^2+2y\langle x,v\rangle+2y^2|v|^2=y+2y\langle x,v\rangle+2y^2|v|^2$$

であるから、Mo(n) の元であることがわかる。

I）－IV）で $\frac{1}{2}n(n+1)+1+n=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$　次元の群が生成出来るが、これがMö(n) そのものである。　これで、Mö(n) の局所座標系での作用は記述出来た。

註。　IV）をn=1 へreduction すると、

$$x \longrightarrow \frac{x+x^2k}{x^2k^2+2kx+1}=\frac{x}{xk+1}$$　となって、分数一次変換となる。

4－2.　多パラメータブラウン運動とMöbius群。

I）－III）に対応して、多パラメータブラウン運動には、次の不変性が存在する。

I) $B_I(x)=B(gx)$,　II) $B_{II}(x)=B(x+h)-B(h)$,　III) $B_{III}(x)=e^{-u/2}B(e^u t)$

勿論、$B_{\mathrm{I}} \sim B_{\mathrm{III}}$ はブラウン運動である。　さらに４－０で見たように
$B_J(x)=|x|B(\frac{x}{|x|^2})$ もブラウン運動である。

Ｉ）－ＩＩＩ）までが、G_0 のブラウン運動の道の空間への群作用を決定しているのは明らかである。

無限遠での作用を決めてやろう。　$(B_J)_J=B$ であることに注意して、

$$\mathrm{I}^{\infty})\quad ((B_J)_{\mathrm{I}})_J(x)=|gx|B_J(\frac{gx}{|x|^2}) = \frac{|x|}{|x|^2}B(\frac{gx/|x|^2}{|gx|^2/|x|^4})=B(gx)=B_{\mathrm{I}}(x).$$

$$\mathrm{II}^{\infty})\quad ((B_J)_{\mathrm{II}})_J(x)=|x|(B_J)_{\mathrm{II}}(\frac{x}{|x|^2}) =|x|\{B_J(\frac{x}{|x|^2}+h)-B_J(h)\}$$

$$=|x|\frac{|x+|x|^2h|}{|x|^2}B(\frac{x/|x|^2+h}{|x+|x|^2h|^2/|x|^4}) + |x||h|B(\frac{h}{|h|^2})$$

$$=\left|\frac{x}{|x|}+|x|h\right|\cdot B(\frac{x+|x|^2h}{1+2\langle x,h\rangle+|x|^2|h|^2}) -|x||h|B(\frac{h}{|h|^2}) .$$

乃ち、外部自己同型 J で $\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & {}^tv & * \\ \hline & I & v \\ \hline & & \end{array}\right) \overset{J}{\sim} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline 2v & I & \\ \hline * & 2{}^tv & 1 \end{array}\right)$ なる対応をしている。

$$\mathrm{III}^{\infty})\quad ((B_J)_{\mathrm{III}})(x)=|x|e^{-u/2}B_J(\frac{x}{|x|^2}e^u)=|x|e^{-u/2}\left|\frac{x}{|x|^2}\right|e^uB(\frac{xe^u/|x|^2}{|xe^u/|x|^2|^2})$$
$$e^{u/2}B(e^{-u}x).$$

Ｉ　）－ＩＩＩ　）でもまた、G_0 と同型な対称性がブラウン運動に存在する事が分かった。　これに対応する群を G_∞ と書こう。

$$G_0 \equiv \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} e^{-u(n+1)/(n+1)} & e^{u(n+2)/(n+1)}\cdot {}^tv & e^{u(n+2)/(n+1)}\frac{|v|^2}{2} \\ \hline 0 & e^{u/(n+1)}g & e^{u/(n+1)}gv \\ \hline 0 & 0 & e^{-nu/(n+1)} \end{array} \right) \right\}$$

$$G_\infty \equiv \{ g;\ {}^tg\in G_0\}$$

まとめると；

定理２　　Ｉ）　ａ）　任意の $g\in G_0$ に対して
$B^g(x)\equiv e^{-u/2}\{B(e^ugx+e^ugv)-B(e^ugh)\}$ はまたブラウン運動である。

ｂ）　$\forall g,h\in G_0$ に対して　$(B^g)^h(x) = B^{gh}(x)$.

I I）　a）　任意の $g \in G_\infty$ に対して

$$B^g(x) \equiv e^{u/2}(1+2\langle h,x\rangle+|x|^2|h|^2)^{1/2} B\left(\frac{e^{-u} g(x+|x|^2 h)}{1+2\langle h,x\rangle+|x|^2|h|^2}\right)$$

$$-e^{u/2}|x||h| B\left(\frac{e^{-u} gh}{|h|^2}\right)$$ はまたブラウン運動である。

b）　$\forall g, h \in G_\infty$ に対して　$(B^g)^h(x) = B^{gh}(x)$.

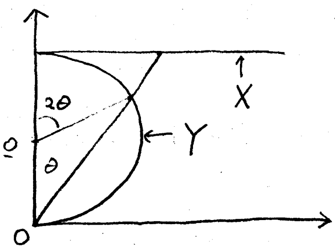
I I I）　$g, g' \in G_0$, $h, h' \in G_\infty$ で $gh = h'g' \in M_0$ なるものが存在して $(B^g)^h \neq (B^{h'})^{g'}$

証明は、今までの議論で明らかであろう。　I I I）については、n=1 での反例がそのまま成立するので（パラメータを低次元に制限すればよい）これも明らかであろう。

4－3.　まだ応用についてはあまり考えていないが、$z \in \mathbb{R}^{n-1}$ を $\mathbb{R}^n$ に $\underline{z} = (0, z)$ として埋めこむと、$1_1 \equiv (1, 0, \cdots, 0)$ とし $\underline{z} + \frac{1_1}{2} \equiv y$　とすると、$\frac{x}{|x|^2} = y$　を充す x は、半径 1 中心 0 の球面を作る。 $\overline{B}$ をブラウン運動をこの球面で平均を取った確率変数とすると、 $B_1(z) = \frac{1}{|x|} B(x) - \overline{B}$　となり、超平面上のブラウン運動と、球面上のブラウン運動との間に ω 毎の対応関係がある事がわかる。

ただし B_1 は反転 J によって B から作られたブラウン運動とする。

特に 2 次元の時、$Y(\theta) \equiv B(\frac{1}{2}\sin 2\theta, \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)) - B(0,1)$　, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



で定義されるガウス過程を考える。

$B(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2} B_1\left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$　として、

B_1 を用いて上を書き直すと、

$$Y(\theta) = \cos\theta B_1(\tan\theta, 1) - B_1(0,1)$$

$$= \cos\theta\{B_1(\tan\theta, 1) - B_1(0,1)\} - (1-\cos\theta) B_1(0,1)$$

となり $Y(\theta)$ はブラウン運動 $X_1(t) \equiv B_1(t,1) - B_1(0,1)$ と、確率変数 $X_2 = B_1(0,1)$ を使って分解された。　残念ながら $X_1(t) \not\perp\!\!\!\perp X_2$ なので、標準表現とはいえないが、簡単な形をしているので何等かの役にたつことを期待している。

[1] Ahlfors, L.V.; Mobius Transformations in Several Dimensions Ordway professorship lecture in Unversity of Minnesota (1981)

[2] Takenaka, S.;On projective invariance of multi-parameter Browian motion. Nagoya Math. J., 67 (1977), 89-120

[3] Takenaka, S.;Representation of Euclidean random field. Nagoya Math. J., 105 (1987), 19-31

[4] Takenaka, S.;Pathwise projective invariance of Brownian motion. preprint (1987)

以上

87／09／22